Teoria dell'Informazione
a.a. 2000/2001

Compito del 19/1/2001

Cognome: Nome:

E-mail:

Parte I

1. Si dimostri che $H(X) + H(Y) = I(X;Y) + H(X,Y)$.
2. Si determini la capacità del canale avente la seguente matrice di transizione:
$$P = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.1 & 0.2 & 0.1 & 0.3 \\ 0.1 & 0.3 & 0.2 & 0.3 & 0.1 \end{pmatrix}$$
3. Si diano due definizioni per il *tasso di entropia* di un processo stocastico e si enunci una condizione sufficiente per la loro esistenza.
4. In un canale binario, la probabilità che durante la trasmissione un bit venga complementato (cioè, che da 0 diventi 1 e viceversa) è costante e pari a $p = 0.1$. Assumendo che la sorgente che alimenta il canale invii un simbolo ogni secondo, è possibile trasmettere informazione affidabile su questo canale ad una velocità superiore a 1 bit/sec? Perché?
5. Si dia la definizione di A_ϵ^n, l'insieme delle sequenze (ϵ, n)-tipiche, e si fornisca (senza dimostrazione) un limite superiore per la sua cardinalità.

Parte II

1. Si dimostri che la funzione entropia
$$H(\mathbf{p}) = -\sum_i p_i \log p_i$$
è concava nell'insieme $S_n = \{\mathbf{p} \in \Re^n \ : \ p_i \geq 0 \text{ per ogni } i = 1 \ldots n, \text{ e } \sum_i p_i = 1\}$.
2. Un codice istantaneo si dice *massimale* se non è possibile aggiungere ad esso una parola di codice ed ottenere un nuovo codice istantaneo. Ad esempio, il codice binario (istantaneo) costituito dalle parole 0, 10, 110 non è massimale, mentre lo è quello avente parole 0, 10, 110, 111.

   Si enunci e si dimostri una condizione necessaria e sufficiente per la massimalità di un codice istantaneo, in funzione delle lunghezze delle sue parole.

   Applicare il criterio determinato per stabilire se un codice binario istantaneo avente parole di lunghezza 2, 2, 3, 3, 3, 4, 5, 5 è massimale o meno.
3. Si costruisca un codice ternario ottimale per la seguente variabile aleatoria:
$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 \\ 0.3 & 0.2 & 0.15 & 0.1 & 0.1 & 0.08 & 0.05 & 0.02 \end{pmatrix}.$$
   Calcolare inoltre la lunghezza media del codice e confrontarla con l'entropia di X.