Elaborato di diploma di specializzazione SSIS
Un approccio didattico alle dimostrazioni per induzione basato sullo studio di grafi

Specializzando: dott. Andrea Marin
Relatore: prof. Giuliana Zucchi

14/05/2004

Indice

Capitolo 1

Introduzione

Le premesse sulle quali si basa questo lavoro sono state formulate in base a quanto osservato durante l'attivitá di tirocinio diretto. Il contesto era dunque quello di triennio di un istituto tecnico industriale ad indirizzo informatico (Abacus); l'analisi delle difficoltá che gli allievi incontrano durante lo svolgimento del loro curricolo di matematica sono state studiate assieme al docente accogliente e sono state fatte risalire ad una sostanziale incapacitá da parte di molti allievi di saper mettere in relazione fatti, di saper osservare regolaritá per formulare congetture e di saper dimostrare.
A riprova di ció abbiamo che l'insegnante di informatica ha avuto modo di scontrarsi con le stesse difficoltá in un contesto diverso.
Da qui nasce l'idea di proporre un percorso didattico di natura interdisciplinare (informatica e matematica) che permetta agli allievi di affrontare queste problematiche; ci é parso che un contesto fertile per questa operazione fosse la teoria dei grafi per le ragioni che spiegheremo nei paragrafi successivi. Il vantaggio di una tale impostazione é che riusciamo ad isolare l'acquisizione di alcune competenze da altre, come ad esempio quelle relative al calcolo oppure quelle relative alla conoscenza degli assiomi della geometria euclidea. D'altra parte l'introduzione della teoria dei grafi non comporta un elevato bagaglio di assiomi e comunque é un argomento che deve essere trattato durante il corso di informatica (anche se l'approccio alla matematica risulterá certamente piú rigoroso). In figura 1.1 mostriamo una mappa concettuale che mostra i principali nodi disciplinari coinvolti dalla teoria dei grafi. Nell'ultimo capitolo proponiamo un'esemplificazione delle idee sostenute; partiremo dalla proposizione di un problema dalla formulazione molto semplice ma che permetterá un'investigazione molto approfondita delle proprietá dei numeri naturali, con particolare attenzione all'induzione.

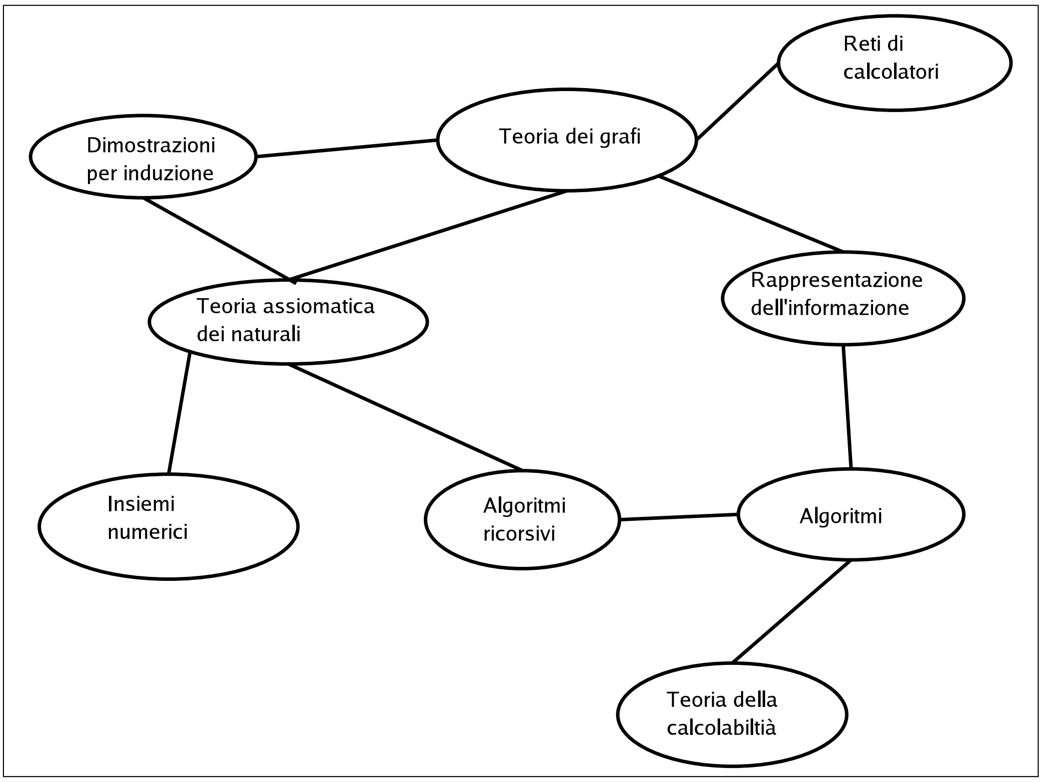

Figura 1.1: Mappa concettuale dei nodi disciplinari ed interdisciplinari legati alla teoria dei grafi

Capitolo 2

Obiettivi della proposta didattica

Come giá detto nella parte introduttiva, durante l'attivitá di tirocinio, si é riscontrato assieme al docente accogliente, prof. Pellegrini, una difficoltá enorme da parte degli allievi nel rapportarsi ai problemi in cui fosse richiesto di dimostrare qualcosa. Questa difficoltá crediamo non sia episodica, visto anche il grande numero di ricerche educative fatte nell'ambito della matematica su questo tema (Cf. [Mar98], Cf. [Zan98], Cf. [Bro99], Cf. [Han00]).

Senza dubbio le competenze relative al *saper dimostrare* sono tra le piú difficili da acquisire (comprendere il metodo assiomatico deduttivo, la formulazione delle ipotesi, la tesi, il concetto di dimostrazione, il principio di non contraddizione, la logica del terzo escluso), ma sono probabilmente anche patrimonio irrinunciabile della matematica che basa proprio sulla dimostrazione buona parte della propria epistemologia.
Nel contesto didattico della scuola secondaria superiore, per molti anni lo sviluppo di queste competenze lo si é avuto nell'ambito della geometria euclidea, ma oggi questa branca della matematica sta lentamente declinando dai curricoli della scuola secondaria. Basti pensare che negli Stati Uniti gli standard NCTM nel 1989 raccomandavano di dare minore enfasi alla geometria euclidea come sistema assiomatico.
Credo che possiamo riassumere le motivazioni della scomparsa della geometria euclidea (ma in particolare delle competenze tradizionalmente associategli) dai curricoli in due punti:

- Una prima corrente di pensiero, interpretata dagli standard NCTM del 1989, sostiene che la matematica debba essere innanzitutto scoperta e ricerca e che pertanto le si addica maggiormente un approccio didattico euristico che, sebbene perda molto del rigore logico accontentandosi di congetture e formuli proposizioni non dimostrandole, valorizzi l'aspetto creativo dello studente. Il British National Curriculum formula un'ipotesi di lavoro coerente con questa impostazione. Dunque alla base dell'accantonamento delle dimostrazioni sta una scelta epistemologica che comunque ci riserviamo di commentare in seguito.

- Un'altra situazione non infrequente é quella che viene a crearsi nelle scuole in cui la matematica non ha valore come disciplina in sé (o meglio non solo) ma ha un aspetto rilevante di supporto ad altre discipline tecniche.
  Pensiamo in particolar modo a quelle scuole dove la matematica deve fornire gli strumenti per l'analisi di sistemi, o per lo studio di reti elettriche nel dominio del tempo e della frequenza. In questi casi l'insegnante non é completamente libero nella scelta dei contenuti disciplinari che desidera affrontare per sviluppare determinate competenze ma deve riservare un ampio spazio all'analisi infinitesimale. D'altra parte le dimostrazioni dell'analisi sono spesso difficili da comprendere e spesso il procedimento seguito per dimostrare una proposizione *ovvia* é concettualmente assai tortuoso (pensiamo ad esepio alla dimostrazione che una successione é convergente se e solo se é una successione di Cauchy, dove entra in gioco l'assioma di completezza, dimostrazione che infatti molti libri di testo omettono). Il risultato é che piú che chiedere agli allievi la competenza del saper dimostrare (cioé del saper produrre una dimostrazione in modo autonomo), ci si limita a chiedere che gli allievi comprendano la dimostrazione dei teoremi che l'insegnante spiega in classe.
  Il problema quindi adesso é diverso, non sta nell'epistemologia della disciplina quanto piuttosto in un'organizzazione didattica del percorso di studi che lascia al docente scarsa possibilitá di scelta. Avendo mete cosí ambizione nell'analisi (trasformate di Laplace, equazioni differenziali) appare troppo oneroso dedicare molto tempo all'introduzione del sistema assiomatico euclideo.

Rinviando al prossimo paragrafo le considerazioni sull'importanza del saper dimostrare ci limitiamo ora a spiegare che l'attivitá didattica che proponiamo ha lo scopo di incidere nella seconda delle due circostanze. Essa si propone difatti di lavorare sulla teoria dei grafi come spazio privilegiato per sviluppare competenze sul saper dimostrare in circostanze nelle quali l'introduzione della geometria euclidea risulta troppo gravoso in termini di tempo.
Sebbene non sia paragonabile il valore formativo della teoria dei grafi con

quello della geometria euclidea, sia per l'articolazione di quest'ultimo sistema assiomantico sia per il ruolo primario che esso riveste sotto un profilo storico, dobbiamo riconoscere alla teoria dei grafi almeno un paio di pregi didattici:

- Al pari della geometria vi é un'elevata componente visiva. Rispetto alle dimostrazioni che si possono incontrare nell'algebra, che talvolta non hanno semplice rappresentazione visiva, le dimostrazioni e le definizioni sui grafi sono visualizzabili abbastanza facilmente. L'importanza di questo aspetto é discusso, oltre che da molti testi di psicologia cognitiva (Cf. [Deb01]), negli altricoli di G. Hanna (Cf. [Han00]) e nel testo di J.R. Brown (Cf. [Bro99]) i quali sostengono che é bene sottoporre agli allievi dimostrazioni che abbiano una possibile controparte grafica (diagrammi, schemi, disegni). L'esempio citato é la convergenza della serie: $\frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{64} + \ldots = \frac{1}{3}$ che puó essere visualizzato dalla figura 2.1. Naturalmente non pensiamo che ogni dimostrazione matematica debba

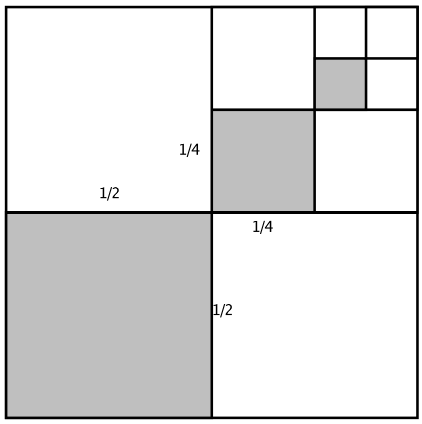

Figura 2.1: Visualizzazione grafica della convergenza di una serie. Tratto da [Han00]

  (e possa) essere accompagnata da una rappresentazione grafica. Tuttavia crediamo che se l'obiettivo é quello di sviluppare la competenza del *saper dimostrare*, questa scelta sia quanto mai appropriata.

- Un'altra osservazione didatticamente rilevante riguarda la quantitá limitata di prerequisiti necessari ad una trattazione elementare della teoria dei grafi. L'argomento pertanto permette di isolare il tema della dimostrazione non arrichendolo con altri aspetti[1] certamente formativi ma anche probabilmente dispersivi.

[1]Se pensiamo ad esempio alle dimostrazioni nell'analisi, ci si trova di fronte con una

> La limitatezza dei prerequisiti rende proponibile il tema a classi eterogenee sul livello di preparazione, ed anche questo é un aspetto considerevolmente favorevole.

2.1 Importanza del saper dimostrare

La proposta didattica di questo documento si basa sull'assunto che la competenza del saper dimostrare é irrinunciabile per un allievo della scuola secondaria superiore. Senze pretese di essere esaurienti in cosí poco spazio, cerco di focalizzare le motivazioni che mi hanno condotto a questa riflessione.

Le dimostrazioni e il pensiero occidentale

Inizio quest'argomentazione affrontando un aspetto che puó essere inserito a pieno titolo tra gli obiettivi formativi generali di ogni piano di studi. La societá occidentale ha un modo di ragionare, di porsi di fronte ai problemi, che non sa prescindere dal principio di non contraddizione. Se questo é uno dei due pilastri del pensiero occidentale, l'altro é certamente l'atteggiamento razionale, cioé la competenza unitá alla disponibilitá di un individuo di rendere ragione delle proprie affermazioni riconducendo la loro fondatezza ad altre proposizioni universalmente condivise (Cf. [Tar04]).
Sebbene non si possa certo pensare che qualche dimostrazione sui grafi o su altri argomenti matematici porti gli allievi ad una consapevolezza profonda di questi aspetti, é innegabile che anche sotto un profilo storico ed epistemologico i fondamenti di questo modo di procedere della conoscenza non prescindano dalla filosofia ed in particolare dalle scienze matematiche. Sulla stessa linea il filosofo e matematico B. Russell si spinge ad affermare (a nostro avviso forse anche troppo precipitosamente) nel saggio *Lo studio della matematica* che la matematica, proprio in virtú dell'esigenza delle dimostrazioni, ha non solo un ragguardervole impatto estetico, ma

> piú che in qualsiasi altra disciplina, l'amore per la veritá trova incoraggiamento [nella matematica] anche quando la fede vacilla. (Cf. [Rus02]).

---

certa frequenza all'uso del concetto di limite o dell'assioma di completezza dei campi ordinati completi. In entrambi i casi si puó ritenere giá un obiettivo ambizioso far sí che gli allievi acquisiscano bene questi concetti, ma difficilmente riusciranno a padroneggiarli per produrre dimostrazioni originali. Consideriamo nuovamente la proposizione *Una successione é convergente se e solo se é una successione di Cauchy*: possiamo certamente far capire agli allievi il significato della proposizione ma non la riterrei adatta, se non in modo trasversale, ad essere scelta per ampliare le competenze degli allievi sul saper dimostrare.

Dimostrazioni ed epistemologia matematica

Sotto un aspetto piú propriamente matematico la dimostrazione assume un ruolo certamente chiave. Essa rappresenta quello che per l'architetto sono le leggi che deve seguire per la progettazione dei suoi edifici. Il fatto che diventi bagaglio di ogni studente ci appare quindi come un elemento cruciale perché si possa dire che questi si sia effettivamente trovato di fronte a questioni matematiche. Non stiamo affermando che bisogna dimostrare sempre tutto perché questo abbia un'importanza concettuale, ma piuttosto che il discente debba avere tempo e dedizione del docente per comprendere l'evoluzione della disciplina.
L'evoluzione della disciplina, la sua vitalitá, corrispondono all'essere stesso della disciplina. Knuth, anch'egli sostenitore dell'importanza dell'inserimento delle dimostrazioni nei curricoli, evidenzia come la dimostrazione, anche sotto un profilo epistemologico, non é interessante solo perché dimostra la veridicitá di una congettura, ma anche se mostra perché quella congettura é vera (Cf. [Knu02]). Allora si evince anche il valore esplicativo delle dimostrazioni: la scelta della via della dimostrazione di una proposizione, come osserva lo stesso Russell nel citato saggio, deve essere fatta in base al valore che essa aggiunge alla comprensione di un determinato argomento. Per Russell ogni passo della dimostrazione deve essere significativo di per sé, ed essa é efficace se al suo termine l'allievo avverte la conclusione come inevitabile. Sottolineiamo, se ce ne fosse bisogno, che allora dobbiamo lasciare da parte la visione delle dimostrazioni come sterili derivazioni sintattiche, ma esse devono portare ad un incremento dell comprensione di un concetto.

Con quali intenti dimostrare

Nel suo articolo Hanna (Cf. [Han00]) stila un elenco delle funzioni della dimostrazione in matematica.

1. Verifica (riguardante la veridicitá di una proposizione)
2. Spiegazione (perché una proposizione é vera)
3. Sistematicizzazione (organizzazione di vari risultati in un sistema deduttivo).
4. scoperta
5. comunicazione (trasmissione di nuova conoscenza matematica)
6. costruzione di una teoria empirica

7. esplorazione del significato di una definizione o delle consegienze di un'assunzione[2]

8. incorporazione di un fatto noto in un nuovo sfondo avendone cosí una visione diversa

Crediamo che ciascuna di esse porti l'allievo ad una maggiore comprensione della matematica come disciplina dinamica e creativa e pertanto meriti di essere evidenziata dal docente con opportuni argomenti.

2.2 Valore formativo della trattazione della teoria dei grafi e della geometria euclidea

Il motivo per il quale si é deciso di associare in un unico paragrafo la teoria dei grafi e la geometria euclidea é giá stato espresso nelle considerazioni iniziali. É altrsí opportuno approfondire qui quali sono gli aspetti didattici che vengono toccati da questi due argomenti. Iniziamo col dire che il confronto é impari. La geometria euclidea, non solo da un punto di vista storico rappresenta una conquista della civiltá paragonabile a poche altre, ma anche permette di esibire un sistema deduttivo che ha affascinato per secoli filosofi e matematici. Notevoli sono le ricerche e risultati ottenuti sul campo a partire dalle fondamenta posate con gli Elementi di Euclide, fino a gingere al sistema di klein. Quindi giá sottolineando questo mostriamo che a nostro avviso sia possibile vedere nella teoria dei grafi un terreno fertile da coltivare affinché si sviluppino nei discenti determinate competenze e non un sostituo ad ampio spettro dello studio della geometria.
Tra i vantaggi del far acquisire la competenza di dimostrare alcune porposizioni nell'ambito della teoria dei grafi vogliamo peró annoverare l'uso massiccio che tipicamente viene fatto del principio di induzione. Questo aspetto costituisce certamente un legame di non poco conto con l'aritmetica, con l'assiomatizzazione di Peano: l'assioma di induzione é infatti di importanza fondamentale per caratterizzare i numeri naturali (é l'unico assioma che rende la teoria di Peano del secondo ordine e che garantisce la categoricitá dei naturali[3]). Dare quindi significato alle dimostrazioni per induzione significherá anche portare gli allievi a riflettere su questi aspetti.

[2]Casi emblematici sono l'esplorazione delle conseguenze dell'assunzione di Frege che ad ogni proprietá corrisponde un insieme, oppure dell'assunzione dell'assioma della scelta.

[3]Trascuriamo le questioni relative alla predicativitá dell'assioma delle parti

La teoria dei grafi, inoltre, si presta agevolmente a combinare assieme il metodo euristico con quello deduttivo. Negli Stati Uniti, come giá citato, v'é una corrente di pensiero tra gli insegnanti di matematica che ritengono che l'aspetto euristico della matematica, portando con sé buona parte della creativitá, sia assolutamente da privilegiare rispetto a quello deduttivo. É nostra opinione che ove possibile é invece bene che i due aspetti coesistano; la matematica non puó né accontentarsi di congetture non dimostrate, né procedere senza formulare congetture da dimostrare.
Nell'osservazione del disegno di un grafo, é abbastanza agevole contare il numero dei vertici e degli archi, fatto per cui riteniamo che sia possibile un procedimento di scoperta delle proposizioni. Osserviamo il diagramma di flusso di figura 2.2. Il processo di scoperta é epistemologicamente accettabile.

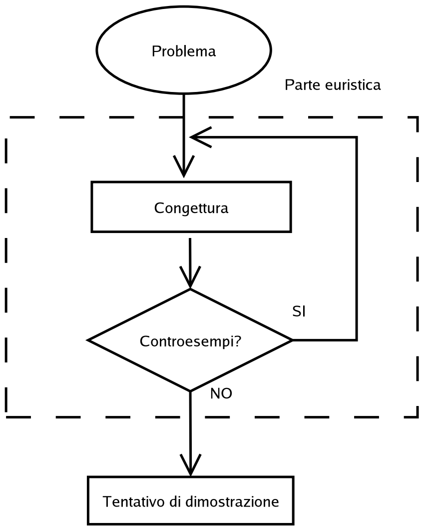

Figura 2.2: Combinare il l'euristica e le abilitá di dimostrazione: proposta di semplificazione didattica

Se prendiamo in considerazione la ricerca matematica sviluppatasi attorno all'ultimo teorema di Fermat possiamo riconoscere come ci fosse una proposizione per la quale non si conosceva alcuna dimostrazione; da una parte venivano cercati dei controesempi che falsificassero tale proposizione, dall'altra si tentava di darne una dimostrazione formale, fintanto che la dimostrazione é stata scoperta. Nel diagramma di flusso non é espressa correttamente la contemporaneitá della ricerca della dimostrazione e dei controesempi, ma tale semplificazione ci appare didatticamente accettabile.
É opportuno osservare come il progresso nella matematica non avvenga soltanto seguendo un procedimento riconducibile alla semplificazione di figura

2.2. Le geometrie euclidee, ad esempio, nascono in modo diverso ma rimane comunque di vitale importanza il ruolo della dimostrazione; su questo l'aver trattato la geometria euclidea ci dá la possibilitá di mostrare il passaggio tra ció che filosoficamente era ritenuto *paradigma dell'episteme* (Cf. [Tar04]) (cioé gli assiomi della geometria) a qualcosa che invece é soggetto ad una accettazione opinabile ossia Doxa (Cf. [Aga78]). Si sottolineerá allora che é l'accettazione degli assiomi che é opinabile, non i teoremi che si dimostrano a partire da essi, cioé la distinzione tra la correttezza di un ragionamento (problema che investe la logica) e la veridicitá di un postulato (problema che investe le scienze sperimentali e soggetto ad ampio dibattito tra gli epistemologi, tra i quali vale la pena di citare Popper e Lakatos). Questo passaggio che porta con sé un importante valore formativo per gli allievi, risualta assai piú complicato con la trattazione di qualcosa di meno articolato (e di storicamente meno rilevante) come puó essere la teoria dei grafi dove la distinzione tra piano sintattico e semantico appare piú difficile.

Con la geometria euclidea, la combinazione tra il modo di procedere euristico e deduttivo é ormai bagaglio assodato della didattica anche grazie agli strumenti multimediali ora disponibili in molte scuole (Cf. [Mar98]). Se, per esempio, vogliamo studiare le proprietá di una certa figura geometrica, prendiamo la parabola, possiamo chiedere di realizzarla al calcolatore con software dinamici come Cabri Geometre o altri; gli allievi potranno effettuare delle congetture e cercare di falsificarle con la prova del trascinameto degli oggetti rappresentati. Una volta convintisi della veridicitá della congettura bisogna dimostrarla.
Vediamo ora come lo stesso modo di procedere puó essere applicato allo studio della teoria dei grafi. Supponiamo di voler dimostrare per induzione che in un albero binario completo ed equilibrato di n livelli il numero dei vertici é dato da: $2^n - 1$.
Il problema da sottoporre agli allievi allora é quello di cercare la relazione tra il numero di livelli di un albero binario completo ed equilibrato e il numero dei vertici. Le definizioni necessarie alla risoluzione di questo problema sono abbastanza numerose ma tutte sottointendono concetti abbstanza elementeri e, soprattutto, facilmente visualizzabili. Una strategia elementare per formulare una congettura é quella di inserire in una tabella in una colonna il numero di livelli e in un'altra il numero di vertici del grafo:

Livelli	Vertici
0	0
1	1
2	3
3	7
4	15

Se chiamiamo con l il numero di livelli e con V l'insieme dei vertici del grafo allora é ipotizzabile la relazione $|V| = 2^l - 1$. Se la congettura é vera, scelto un numero qualsiasi di livelli riusciamo a *predire* (Cf. [Tar04]) il numero di vertici che avrá quel grafo. É importante far osservare alcune aspetti agli allievi:

- Il fatto che la congettura non venga smentita non puó essere considerata prova della sua veridicitá;

- Vi é quindi una grossa differenza tra l'argomentare la bontá di una congettura e il dimostratla (Cf. [Zan98]).

- Anche se ci accontentassimo della congettura ancora non sapremmo il *motivo* per il quale sussiste quel legame tra la cardinalitá dell'insieme dei vertici del grafo e i livelli dell'albero.

Dunque non ci resta che dimostrare il fatto che $|V_l| = 2^l - 1$. Perché usare una dimostrazione per induzione? Nella formulazione della congettura gli allievi avranno certamente costruito alberi di livelli sempre maggiori e, forse, avranno osservato una certa regolaritá sul numero dei vertici che dovevano aggiungere per ogni livello in piú.
Possiamo quindi ragionare per induzione sul numero dei livelli dell'albero. Se $l = 0$ allora il grafo avrá $V_0 = \emptyset$ e quindi $|V_0| = 0 = 2^0 - 1$. Se abbiamo invece un albero con $l > 0$ livelli, quanti vertici dobbiamo aggiungere per ottenere un albero di livello $l + 1$? La risposta é abbastanza semplice e comprensibile osservando la figura 2.3. Il primo passaggio della nostra dimostrazione sará dunque l'osservare che ogni livello ha il doppio dei vertici del livello precedente. L'esplicitazione di questa semplice proposizione é importante perché aggiunge senso alla comprensione della struttura di un albero binario indipendentemente dalla proposizione che vogliamo dimostrare. Ora il nostro ragionamento per induzione diventa abbastanza semplice. Infatti sappiamo che il livello l (cominciando la numerazione da 0) ha $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdots 2 = 2^l$ vertici. Se un albero con l livelli ha, per ipotesi induttiva, $|V_l| = 2^l - 1$ vertici, un albero di $l + 1$ livelli avrá gli stessi presenti precedentemente ai quali si aggiungono i vertici presenti al livello l che abbiamo detto essere 2^l. Quindi

$$|V_{l+1}| = \underbrace{2^l - 1}_{\text{Ipotesi induttiva}} + 2^l = 2 \cdot 2^l - 1 = 2^{l+1} - 1.$$

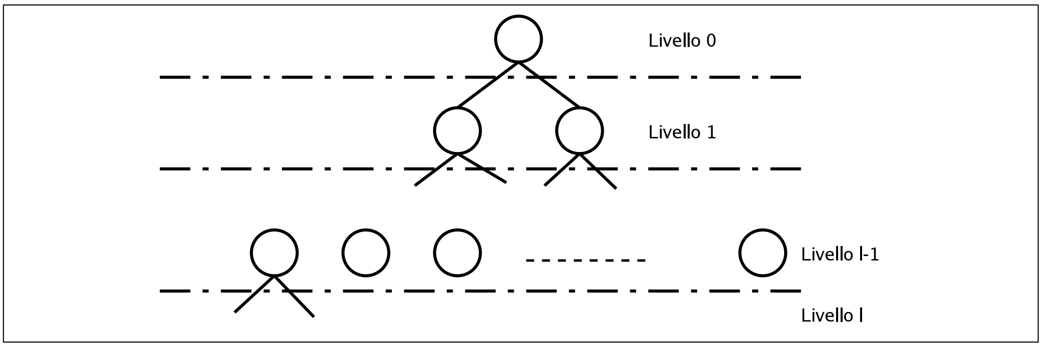

Figura 2.3: Dimostrare la relazione tra numero dei vertici e livelli di un albero binario bilanciato completo

Quali sono le qualitá che secondo noi ha questa dimostrazione:

- Esprime un legame tra il procedimento euristico e quello deduttivo
- Ha un valido supporto visivo che aiuta la comprensione
- I passi della dimostrazione sono significativi di per sé. Non ci si trova a dover dimostrare proposizioni delle quali non se ne comprende l'utilitá
- Richiede una minima abilitá di calcolo, quindi l'attenzione degli allievi rimane focalizzata sul senso della dimostrazione
- esprime chiaramente non solo la veridicitá della proposizione iniziale, ma anche il perché essa é necessariamente vera

In merito all'ultimo punto della precedente lista di osservazioni, é possibile verificare se gli allievi hanno raggiunto tale consapevolezza chiedendo loro di generalizzare la proposizione e la dimostrazione per alberi n-ri completi ed equilibrati.

2.3 Applicazioni interdisciplinari

Sulla teoria dei grafi possiamo individuare due tipi di dimostrazioni:

1. Dimostrazioni di proprietá di un grafo
2. dimostrazioni di correttezza di algoritmi sui grafi

L'esempio mostrato nel precedente paragrafo rientra ovviamente nella prima categoria. Tuttavia appare interessante non trascurare la seconda tipologia di dimostrazioni. Se al corso di matematica é affiancato un corso di informatica per specialisti o sperimentale (per esempio per liceo tecnologico), questa attivitá é esplicitamente interdisciplinare. Se infatti la dimostrazione della correttezza di un algoritmo é in generale un lavoro complesso e laborioso, gli algoritmi sui grafi, se considerati ad alto livello, hanno la caratteristica di facilitare tale operazione. D'altra parte nei corsi in cui invece si tratta matematica ed informatica questo tema puó essere trattato all'interno del curricolo stesso di matematica. Purtroppo non sono a conoscenza di software che permettano di trattare agevolmente grafi in un linguaggio di programmazione[4], in modo da poter affiancare un'efficace attivitá di laboratorio, ma una sua creazione non appare un'impresa informatica troppo difficile.

Sempre da un punto di vista informatico, cioé interdisciplinare, gli algoritmi sui grafi hanno una vasta gamma di applicazioni. Se prendiamo ad esempio i *routers* di Internet scopriamo che essi instradano i pacchetti principalmente con uno di questi due algoritmi (Cf. [Tan98]):

- protocollo *RIP* basato sull'algoritmo di Bellman-Ford o algoritmo - Ford-Fulkerson.
- protocolli di cammino minimo basati sull'algoritmo di Dijkstra.

Aldilá delle rilevanze applicative di un tale studio, vi é anche un risvolto piú marcatamente concettuale. Uno degli obiettivi didattici del trattamento dell'informatica é certamente quello di portare gli allievi alla comprensione e alla capacitá d'uso della ricorsione. Riteniamo che questo traguardo sia raggiungibile piú facilmente se gli allievi hanno ben inteso il significato del principio di induzione. Allora le dimostrazioni di correttezza sugli algoritmi sui grafi davvero non si limitano a dimostrare qualcosa ma spiegano anche la causalitá di tale correttezza spesso ripercorrendo il modo stesso in cui l'algoritmo lavora.

[4] Infatti la trattazione dei grafi a basso livello comporta problemi sulla rappresentazione e la gestione della memoria che probabilmente non si intendono affrontare

Capitolo 3

Proposte di un'attivitá interdisciplinare esemplificativa

In questa attivitá didattica proponiamo lo studio di un problema accattivante per la semplicitá della sua formulazione e per i suoi importanti risvolti concettuali. L'attivitá é stata indicata come interdisciplinare perché porta gli allievi a confrontarsi con degli algoritmi ricorsivi; se il corso di matematica é affiancato da un corso di informatica, riteniamo che la comprensione dell'assioma di induzione sui naturali possa fornire un'ottima base per il docente di informatica.

3.1 Obiettivi

Illustriamo in questa sezione gli obiettivi che ci proponiamo di raggiungere con lo svolgimento della seguente attivitá

3.1.1 Obiettivi formativi

Gli obiettivi formativi, di carattere interdisciplinare e comuni a tutte le discipline del corso di studi, che ci proponiamo di concorrere a raggiungere sono:

1. Potenziamento della capacitá logica degli allievi.
2. Favorire la consapevolezza dell'atteggiamento razionale.
3. Comprendere l'importanza storica ed epistemologica che il metodo assiomatico deduttivo ha avuto nello sviluppo delle societá occidentali.

3.1.2 Obiettivi didattici

Sotto il profilo della disciplina matematica gli obiettivi che ci proponiamo sono i seguenti:

1. Costruzione delle capacitá di comprendere e sviluppare dimostrazioni:
   (a) Essere in grado di individuare le ipotesi
   (b) Essere in grado di individuare la tesi
   (c) Comprendere quando una proposizione discende da un'altra
   (d) Essere in grado di contestualizzare una dimostrazione nel corretto sistema assiomatico (nel caso specifico quello dei numeri naturali)
   (e) Essere in grado di esibire controesempi per proposizioni false
2. Essere in grado di osservare regolaritá e formulare ipotesi
3. Conoscere il principio di induzione ed essere in grado di ricorrervi per semplici dimostrazioni
4. Essere in grado di lavorare con funzioni definite ricorsivamente
5. Sapere il significato di calcolabilitá per ricorsione finita
6. Comprendere il legame tra la struttura assiomatica dei naturali di Peano e la definizione di funzioni o procedure ricorsive nei linguaggi di programmazione.
7. Comprendere il significato di formulare un modello matematico di fronte ad una situazione reale.
8. Saper formalizzare proprietá relative ad un grafo.

3.2 Prerequisiti

Per affrontare questa attivitá sono necessari i seguenti prerequisiti:

1. Conoscenza degli assiomi di Peano sui naturali
2. Saper risolvere semplici equazioni o disequazioni
3. Conoscenza delle definizioni relative ai grafi, in particolare (oltre alle basilari) quella di cammino minimo.

3.3 Materiali e risorse richiesti

L'attivitá si svolge con pochissimi materiali (alcune schede sono sufficienti). Se si decide di approfondire la parte relativa agli algoritmi ricorsivi o alle funzioni calcolabili mediante ricorsione finita, sarebbe bene avere a disposizione un laboratorio di informatica con un ambiente di programmazione che ammetta la possibiltiá del debug.

3.4 Descrizione dell'attivitá

L'attivitá che presentiamo si presenta come un lavoro di problem solving. Il problema non é immediatamente riconducibile alla teoria dei grafi (come ad esempio quelli in cui si chiede di dimostrare della proprietá di grafi con certe caratteristiche) e consente anche approcci risolutivi diversi da quelli che stiamo prendendo in considerazione.
Tuttavia riteniamo la proposta di notevole interesse per le abiltiá che richiede da parte degli studenti, per la semplicitá della sua formulazione e per il fatto che il risultato non é immdiatamente raggiungibile.

3.4.1 Il testo del problema

L'urbanistica delle cittá romane era molto precisa e rigida. Le strade si intersecavano formando angoli di novanta gradi. Nel complesso, nelle cittá, le strade formavano una rete regolare, chiamata graticolato romano (vedi figura 3.1). Il problema che ci poniamo é il seguente: date due intersezioni nella cittá, in quanti modi é possibile raggiungere la seconda intersezione a partire dalla prima facendo il numero minore possibile di strade?

3.4.2 Un prima trasposizione del problema

Note sulla lezione La lezione ha lo scopo di riformulare il problema di partenza in termini matematici; si discuteranno assieme agli allievi le approsimazioni, le ipotesi aggiuntive e le semplificazioni che si dovranno accettare nel lavorare con il modello matematico. Il tipo della lezione sará frontale nel momento in cui si presenterá il modello, partecipata nel momento in cui lo si discuterá; la durata prevista é di mezz'ora.

Contenuti Modelliamo il problema nel seguente modo:

- Ad ogni interesezione della mappa corrisponde un vertice del grafo

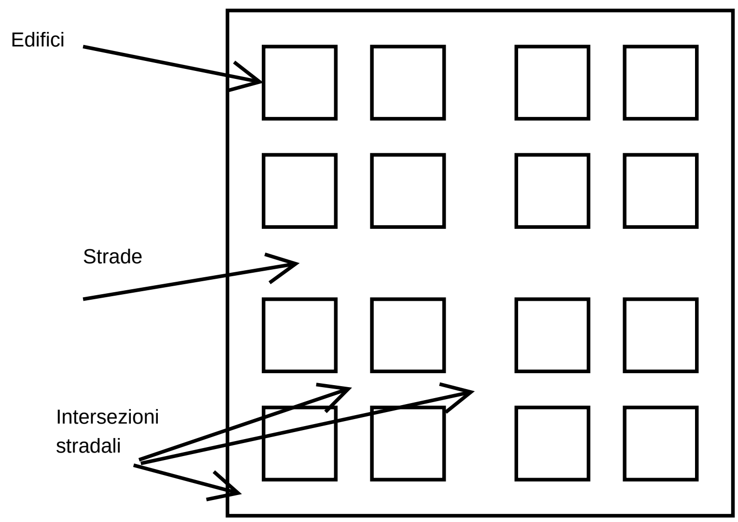

Figura 3.1: Schematizzazione di una piantina di cittá romana. Rappresentazione che evidenzia le tipiche strade connesse ad angolo retto formando il *graticolato romano*

- Se esiste una strada che unisce un'interesezione ad un'altra interesezione allora il grafo avrá un arco che unisce il vertice associato alla prima intersezione con quello associato alla seconda

In questo modello il nostro problema diventa quello di trovare il numero di cammini minimi tra due vertici di un grafo in cui sono soddisfatte determinate proprietá.
Vista la particolare natura del grafo possiamo pensare di etichettare i vertici con una coppia di naturali secondo quanto illustrato in figura 3.2. Abbiamo dunque introdotto informalmente il problema ma giá possiamo far lavorare gli allievi. Innanzitutto possiamo chiedere loro quali sono i limti di questo modello (es. non tiene conto del tempo di percorrenza delle strade, assume che il reticolato si perfetto, ecc...); faremo notare che ogni qualvolta introduciamo un modello, lo facciamo perché esso risulti trattabile con strumenti matematici. Questo comporta peró una semplificazione ed una approssimazione fatta a spese di quegli aspetti che riteniamo trascurabili[1]. Superato questo

[1]Il concetto qui esposto ha un'importanza a nostro parere molto elevata. Spesso non si pone attenzione sulla differenza tra sistema e modello, ma probabilmente la valenza concettuale di questa classificazione é molto elevata. Gli studenti avranno senz'altro trovato altri modelli semplificativi; in una scuola tecnica in cui si studia l'elettronica, ad esempio, questi saranno abituati a dimensionare circuiti elettronici usando la legge di Ohm $U = RI$; faremo notare che il loro modello non tiene conto del variare delle resistenze dei conduttori

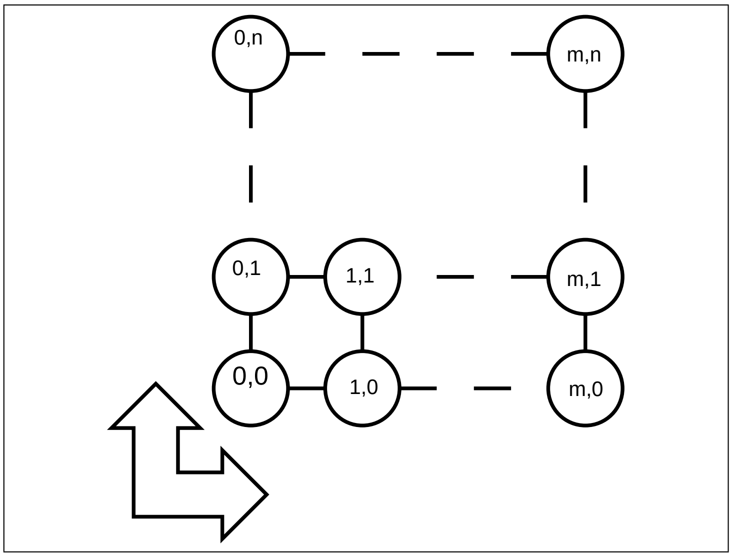

Figura 3.2: Rappresentazione grafica di un modello del problema. La cittá in questo caso ha n strade orizzontali (es. direttrice Est-Ovest) e m strade verticali (es. direttrice Nord-Sud).

primo importante aspetto chiederemo agli allievi di esprimere formalmente le proprietá del grafo; grazie all'etichettatura dei vertici tale formalizzazione non dovrebbe risultare particolarmente complessa.

3.4.3 Prima analisi del problema

Note sulla lezione La lezione ha lo scopo di accrescere la dimestichezza dei ragazzi col problema e con la sua formulazione matematica. Si cercherá quindi di trovare una caratterizzazione dei cammini minimi tra due veritici del grafo. Si porrá particolare attenzione alle dimostrazioni delle proposizioni che saranno formulate.
Parte della lezione sará svolta come lezione frontale e parte come lavoro di gruppo. Saranno prevedibilmente richieste due ore di lavoro.

Una prima semplificazione del problema consisterá nel considerare non piú i cammini minimi tra due qualsiasi vertici del grafo ma tra il vertice $v_{0,0}$ e un altro vertice.
Suddivideremo la classe a gruppi di tre o quattro persone e chiederemo loro di svolgere la scheda di figura 3.3.

al variare della temperatura (espetto addirittura non sempre trascurabile).

Facciamo alcune osservazioni sulla scheda. Innanzitutto la prima dimostra-

SCHEDA DI LAVORO

Elenenca tutti i cammini minimi che partono dal vertice $v_{0,0}$ e terminano al vertice $v_{3,2}$. Rispondi alle seguenti domande:

- Quale strategia hai usato per individuare tutti i cammini minimi?
- Vi é un cammino minimo che passa per il vertice $v_{0,4}$? Perché?
- Puoi dimostrare che quelli che hai individuato sono tutti e soli i cammini minimi richiesti?

Finora abbiamo dato per scontato che, dati due vertici del grafo, esista sempre un cammino minimo. Dimostra la seguente proposizione: *Dato un qualsiasi vertice $v_{i,j}$ del grafo, allora esiste almeno un cammino minimo tra $v_{0,0}$ e $v_{i,j}$ ($i, j \in \mathbb{N}$).*

Suggerimento: Ricordati che l'assioma di induzione é equivalente alla proposizione *Ogni sottoinsieme non vuoto dei naturali ha minimo*.

Considera ora la relazione Ψ che lega ogni vertice $v_{i,j}$ alla lunghezza dei cammini minimi tra quel vertice e $v_{0,0}$.

- Dimostra che la relazione é una funzione.
- Qual é il dominio di Ψ?
- Qual é il codominio di Ψ?
- Dimostra se la funzione é o no iniettiva.
- Dimostra se la funzione é o no suriettiva.
- Effettua alcune prove del calcolo di Ψ; formula una congettura che esprima algebricamente il valore di Ψ calcolato sul vertice $v_{i,j}$.

Figura 3.3: Scheda di lavoro per gli allievi

zione chiede agli allievi di dimostrare un fatto che appare evidente: l'esistenza del cammino minimo. Il pregio di questo lavoro é il ricondurre qualcosa di evidente all'assioma di induzione che invece potrbbe essere meno evidente. La dimostrazione dovrebbe seguire una traccia di questo tipo: individuazione dell'insieme delle lunghezze dei cammini tra due vertici, dimostrazione che l'insieme non é vuoto, conclusione che l'insieme ha minimo.
Le dimostrazioni di non iniettivitá della funzione Ψ e di non suriettivitá ovviamente richiedono solo l'esibizione di controesempi.

Passiamo ora alla parte piú delicata della lezione, che si svolgerá con metodo frontale, cioé alla caratterizzazione dei cammini minimi. Presumibilmente la congettura formulata dagli allievi all'ultimo punto della scheda sará corretta:

$$\Psi(v_{ij}) = i + j, \quad i, j \in \mathbb{N} \tag{3.1}$$

Per dimostrarlo possiamo seguire molte strade; ad esempio potremmo applicare al grafo l'algoritmo di Dijkastra e mostrare che i cammini minimi hanno sempre una lunghezza che soddisfa la (3.1). In questo contesto proponiamo una dimostrazione per induzione.
Procederemo per induzione su $k = m + n$ mostrando che $\Psi(m, n) = m + n \quad (\forall m, n \in \mathbb{N})$. Se $k = 0$ allora necessariamente $m = 0 \wedge n = 0$. Banalmente $\Psi(0, 0) = 0$. In figura 3.4 mostriamo un grafo indicando i nodi per i quali hanno in comune $k = m + n$. Supponiamo vera la proposizione per

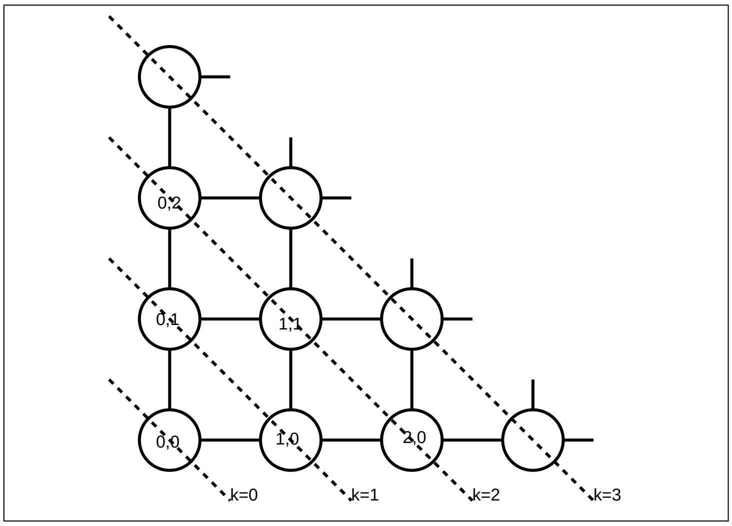

Figura 3.4: Rappresentazione grafica della dimostrazione per induzione. Si procede per induzione su k con $k = m + n$

$m+n=k$ e mostriamo che vale anche per $k+1$. Se consideriamo $k'=k+1$ con $m'+n'=k'$ allora possiamo scegliere sempre un cammino minimo di lunghezza $m+n$ per raggiungere uno qualsiasi dei vertici $v_{m,n} \quad | m+n=k$. In particolare possiamo raggiunger il vertice $v_{m'-1,n'}$ oppure il vertice $v_{m',n'-1}$. Infatti $m'+n'-1=k$. Poiché per passare da uno di questi due vertici a $v_{m,n}$ é necessario un cammino minimo di un passo (vedi figura3.5) allora la dimostrazione é completata.

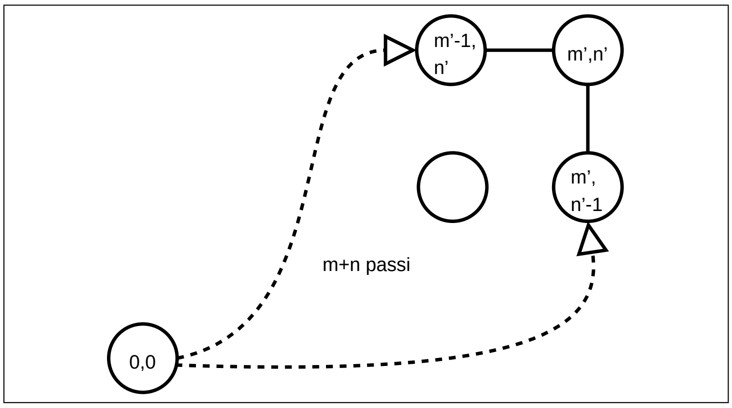

Figura 3.5: Rappresentazione grafica della dimostrazione per induzione. Per ipotesi induttiva i cammini minimi da $v_{0,0}$ a $v_{m,n}$ hanno lunghezza $k=m+n$.

Spunti di riflessione per gli studenti:

- Perché é necessario considerare sia la possibililtá di raggiungere il vertice $v_{m',n'}$ da $v_{m'-1,n}$ che da $v_{m',n'-1}$?
- Immaginando di potersi muovere sul grafo come su una carta geografica, possiamo indicare un cammino minimo che parte da $v_{0,0}$ con i punti cardinali N, S, E, O. Ad esempio il cammino (N, N, E, E, N, O) porterebbe al vertice $v_{1,3}$. Mostra che i cammini minimi nel grafo che abbiamo definito sono caratterizzati dall'avere, nel caso in cui il vertice da raggiungere sia $v_{m,n}$, m volte la lettera O e n volte la lettera E disposte in un ordine qualsiasi.

Evidenziamo come la dimostrazione per induzione che abbiamo proposto non sia concettualmente elementare, ma che sia resa comprensibile dal supporto grafico. Ogni passaggio della dimostrazione é significativo: infatti gli spunti di riflessione lasciati allo studente hanno proprio lo scopo di spingerli ad una maggiore comprensione del percorso intrapreso.

3.4.4 Soluzione ricorsiva del problema iniziale

Note sulla lezione In questa lezione definiremo una funzione induttivamente. Tale definzione si basa sulla dimostrazione data nel precedente incontro quindi, nonostante certamente comporti difficoltá cognitive non indifferenti, non dovrebbe risultare piovuta dall'alto. La lezione, della durata di un'ora, sará frontale con ampi spazi dedicati alla discussione.

Contenuti Innanzitutto é bene riprendere in mano gli spunti lasciati agli studenti. Il secondo punto ci permette di dimostrare come corollario che per raggiungere il vertive $v_{m,0}$ o $v_{0,n}$ esiste un solo cammino minimo. Se indichiamo con $\Phi : V \to \mathbb{N}$ la funzione che, dato un vertice, assume il valore del numero di cammini minimi da $v_{0,0}$ a tale vertice, possiamo subito dire che:

$$\Phi(v_{m,0}) = \Phi(v_{0,n}) = 1, \quad \forall m, n \in \mathbb{N} \tag{3.2}$$

Se consideriamo il vertice $v_{m,n}$ con $m > 0 \wedge n > 0$, allora (abbiamo giá visto nella dimostrazione precedente), per ottenere un cammino minimo, dobbiamo prima raggiunger o il vertice $v_{m-1,n}$ o il vertice $v_{m,n-1}$. A quel punto abbiamo solo una possibilitá per raggiungere $v_{m,n}$[2]. Quindi possiamo dire che:

$$\Phi(v_{m,n}) = \Phi(v_{m-1,n}) + \Phi(v_{m,n-1}). \quad \forall m, n > 0 \tag{3.3}$$

Riassumendo:

$$\Phi(v_{m,n}) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad m = 0 \vee n = 0 \\ \Phi(v_{m-1,n}) + \Phi(v_{m,n-1}) & \text{se} \quad m > 0 \wedge n > 0 \end{cases} \tag{3.4}$$

Chiediamo ora agli allievi di riempiere con gli opportuni valori la tabella sottostante:

$\Phi(v_{0,4})$	$\Phi(v_{1,4})$	$\Phi(v_{2,4})$	$\Phi(v_{3,4})$	$\Phi(v_{4,4})$
$\Phi(v_{0,3})$	$\Phi(v_{1,3})$	$\Phi(v_{2,3})$	$\Phi(v_{3,3})$	$\Phi(v_{4,3})$
$\Phi(v_{0,2})$	$\Phi(v_{1,2})$	$\Phi(v_{2,2})$	$\Phi(v_{3,2})$	$\Phi(v_{4,2})$
$\Phi(v_{0,1})$	$\Phi(v_{1,1})$	$\Phi(v_{2,1})$	$\Phi(v_{3,1})$	$\Phi(v_{4,1})$
$\Phi(v_{0,0})$	$\Phi(v_{1,0})$	$\Phi(v_{2,0})$	$\Phi(v_{3,0})$	$\Phi(v_{4,0})$

Il completamento della tabella dovrebbe aiutare gli allievi a comprendere la definzione ricorsiva della funzione. Dalla tabella che si ottiene (vedi figura 3.6) si puó aiutare gli allievi a formulare una congettura molto interessante:

[2] A voler essere precisi, nella dimostrazione precedente abbiamo scelto di raggiungere $v_{m-1,n}$ o $v_{m,n-1}$ ma non abbiamo dimostrato che quelle erano le uniche scelte possibili. Quindi, ma lo si puó lasciare come lavoro per gli studenti, bisogna dimostrare (per assurdo) che ogni cammino minimo che porti a $v_{n,m}$ passa per i due vertici citati.

infatti compaiono nelle diagonali secondarie i coefficienti dei termini degli sviluppi dei binomi. Ci aspettiamo che gli allievi conoscano almeno lo sviluppo dei quadrati e dei cubi del binomio, meglio se é giá stato fatto uno studio sul binomio di Newton. La dimostrazione della congettura avverá piú

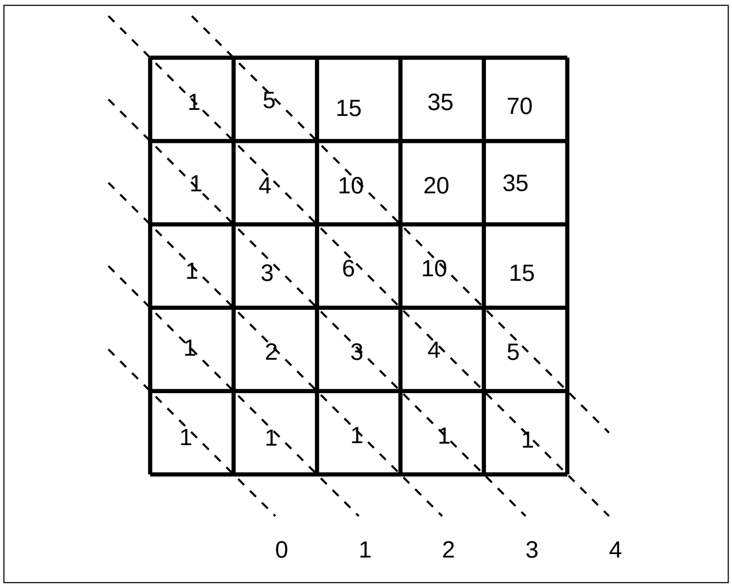

Figura 3.6: Dal problema sui grafi al triangolo di Tartaglia-Pascal

avanti. A seconda del taglio interdisciplinare che vogliamo dare all'attivitá ci si puó spingere nell'affrontare altri algoritmi ricorsivi notevoli in informatica. In questo contesto credo sia comunque positivo mostrare l'implementazione dell'algoritmo in Pascal; il valore formativo di questo approccio puó risultare elevato se si ha a disposizione un laboratorio informatico che permetta agli studenti di effettuare il *debug*[3] del programma.

3.5 L'algoritmo, la funzione Φ, il principio di induzione

Note sulla lezione Questa lezione, della durata di un'ora, ha due scopi: il primo é quello di mostrare il legame esistente tra la definizione ricorsiva

[3]Il debug é uno strumento messo a disposizione da certi ambienti di sviluppo, ad esempio il Borland Turbo Pascal, che permette di eseguire il programma passo passo e di ispezionare nel frattempo il contenuto delle variabili

```
Precondizioni: m, n > 0
function Phi(m,n: integer): integer;
begin
    if ((n=0) Or (m=0)) then
        Phi:=1
    else
        Phi:=Phi(m-1,n)+Phi(m,n-1)
end;
```

Figura 3.7: Function Pascal che calcola la funzione definita ricorsivamente Φ

di Φ e il principio di induzione. Tuttavia, se cambiamo registro interpretativo, possiamo vedere la definizione di Φ come una funzione calcolabile informaticamente e quindi esibire una dimostrazione di correttezza a partire dalla dimostrazione di terminazione. La lezione sará frontale della durata di un'ora.

Contenuti Innanzitutto diamo agli allievi una copia dell'algoritmo mostrato in figura 3.7. Dimostriamo allora che l'algoritmo termina sempre. L'algoritmo di basa su due formule:

$$\forall m, n \in \mathbb{N} : \Phi(0, n) = \Phi(m, 0) = 1 \tag{3.5}$$

$$\Phi(m, n) = \Phi(m, n-1) + \Phi(m-1, n) \text{negli altri casi} \tag{3.6}$$

Dobbiamo dimostrare che per ogni coppia m, n otteniamo un risultato utilizzando un numero finito di volte le (3.5) o (3.6).
Usiamo il principio di induzione nella seguente forma:
Data la famiglia di predicati P_h al variare di $h \in \mathbb{N}$, se vale che:

1. *P_0 é vero*

2. *$\forall h \in \mathbb{N}$ si ha che $P_h \Rightarrow P_{h+1}$*

allora P_h é vera per ogni $h \in \mathbb{N}$.
Consideriamo il seguente insieme:

$$C_h \triangleq \{(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} | ij \leq h\}$$

Possiamo dimostrare facilmente che valgono le seguenti:$C_h \subset C_{h+1}$ e $\bigcup_{h\in\mathbb{N}} C_h = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Allora il predicato che vogliamo dimostrare é il seguente:

$$P_h : \Phi(m,n)\text{é calcolabile mediante ricorsione finita}(\forall m,n \in C_h)$$

Allora P_0 é banalmente verificata. Dobbiamo dimostrare che $P_h \rightarrow P_{h+1}$. Dimostrare P_{h+1} significa dimostrare che Φ é calcolabile per ricorsione finita per ogni coppia $(m,n) \in C_{h+1}$. Dal momento che assumiamo vera P_0 e che $C_0 \in C_{h+1}$ limitiamoci a quei casi in cui le coppie sono appartenenti a $C_{h+1} \smallsetminus C_0$. Prendiamo la coppia (m,n). Per la (3.6) essa si calcolerá mediante ricorsione finita se $\Phi(m-1,n)$ e $\Phi(m,n-1)$ sono calcolabili. Mostriamo la calcolabilitá di $\Phi(m,n-1)$; per farlo dobbiamo dimostrare che $(m,n-1)$ sta in C_h, infatti:$m(n-1) = mn - m \leq h - (m-1)$ Analogamente si dimostra che $(m-1,n) \in C_h$. Poiché dunque $P_h \rightarrow P_{h+1}$ e P_0 é vera, allora P_h é vera $\forall h \in \mathbb{N}$.

3.6 Cammini minimi e binomio di Newton

Note sulla lezione In questa lezione di lavoro cooperativo agli allievi é richiesto di dimostrare la congettura fatta nelle lezioni precedenti sul legame tra il numero di cammini minimi da $v_{0,0}$ a $v_{m,n}$ e il coefficiente binomiale $\binom{m+n}{m}$.
La lezione della durata di due ore, si articola con un cooperative learning, durante il quale un scheda guiderá gli studenti verso la dimostrazione della congettura. La classe verrá divisa in gruppi di tre o quattro persone.

Contenuti I contenuti sono quelli indicati nella scheda di figura 3.8. Il fatto che esista un legame tra i cammini minimi e i coefficienti dei termini del binomio di Newton dovrebbe risultare abbastanza sorprendente per tutti gli studenti. Questa dovrebbe essere un spinta motivazionale alla ricerca di una spiegazione; evidenziamo quindi il legame tra il dimostrare una proposizione e lo spiegare la ragione per cui sussiste un determinato fatto. Anche se le dimostrazioni richieste agli studenti dalla scheda in figura 3.8 possono sembrare complesse, dobbiamo considerare che alcune di esse ricalcano molto quelle giá viste in classe. Inoltre per l'insegnante ha importanza l'osservazione degli allievi durante lo svolgimento della scheda: da questa infatti egli puó dedurre i processi cognitivi messi in atto dalle attivitá richieste.
Naturalmente alla conclusione del lavoro di gruppo il docente mostrerá la correzione della scheda.

SCHEDA DI LAVORO

Vogliamo dimostrare la seguente proposizione: *Il numero di cammini minimi da $v_{0,0}$ a $v_{m,n}$ (cioé $\Phi(m,n)$) é uguale al coefficiente del termine $a^m b^n$ e al coefficiente del termine $a^n b^m$ dello sviluppo del binomio $(a+b)^{m+n}$.*

Traccia della dimostrazione

Possiamo rappresentare un cammino minimo grazie ad una sequenza di vertici. Nel caso particolare del grafo che stiamo trattando, come abbiamo giá visto, possiamo sostituire con la lettera E (Est) il passaggio dal vertice $v_{i,j}$ al vertice $v_{i+1,j}$, con la lettera N (Nord) il passaggio dal vertice $v_{i,j}$ al vertice $v_{i,j+1}$. *Dimostra che un cammino é minimo se e solo se é rappresentabile da una sequenza di N e E.*

Proviamo ora a sviluppare alcuni binomi:

$$
\begin{aligned}
(N+E)^1 &= N+E \\
(N+E)^2 &= (N+E)(N+E) = NN+NE+EN+EE \\
(N+E)^3 &= (NN+NE+EN+EE)(N+E) = \\
&= NNN+NEN+ENN+EEN+NNE+NEE+ \\
&+ENE+EEE
\end{aligned}
$$

Dimostra, per induzione, che nello sviluppo sopra indicato del binomio $(N+E)^k$ compaiono tutti i percorsi minimi di lunghezza k.

Il coefficiente del termine del binomio indica il numero di monomi simili nello sviluppo. Quindi l'ultimo passo per concludere la dimostrazione della nostra congettura é il seguente: *Il vertice che si raggiunge seguendo il cammino indicato da monomi simili é lo stesso.*

Sviluppa ora il binomio $(a+b)^5$ servendoti della funzione Φ calcolata in precedenza.

Figura 3.8: Scheda di lavoro per gli studenti

A questo punto gli studenti hanno a disposizione un metodo ricorsivo per determinare i coefficienti binomiali. É possibile aggiungere, se lo si ritiene utile, un'attivitá per ricavare la formula chiusa di Φ. Nel caso in cui nel programma si sia svolta la parte relativa al calcolo combinatorio, sará facile riconoscere nel numero di percorsi minimi per il vertice $v_{m,n}$ le permutazioni con ripetizione di $m + n$ elementi con ripetizione di m e n:

$$\Phi(m, n) = \frac{(m+n)!}{m! \cdot n!}$$

Capitolo 4

Conclusioni

Ci eravamo proposti di individuare un percorso di supporto allo sviluppo delle competenze sul *saper dimostrare* in matematica a partire dalla teoria dei grafi; dopo aver argomentato inizialmente il motivo per cui la nostra scelta é ricaduta proprio su questa branca dell'algebra abbiamo proposto un percorso didattico coerente con le premesse. Crediamo che i maggiori pregi di tale proposta siano:

1. Richiesta minima di prerequisti.

2. Focalizzazione sui due aspetti ritenuti fondamentali nell'acquisizione delle competenze matematica: il saper formulare congetture e il saper dimostrare.

3. Ampio supporto visuale alle dimostrazioni: cosa che é stato dimostrato facilitare la comprensione dei concetti.

4. Valenza interdisciplinare dell'intervento.

Se confrontiamo infatti le dimostrazioni proposte nel capitolo precedente con quelle usualmente trattate nell'affrontare il principio di induzione (ad esempio la dimostrazione della disuguaglianza di Bernulli), riteniamo che abbiamo il vantaggio del supporto grafico che aiuta molto a dare senso alle operazioni che si svolgono. Nella mia esperienza di insegnante di informatica ho osservato come gli allievi comprendano molto meglio la ricorsione nello studio delle strutture dati astratte, come liste ed alberi, che non nello studio dei tipici algoritmi sugli integer (come ad esempio il calcolo del fattoriale). Credo che questo sia dovuto a due fattori: il primo é appunto il supporto visivo che si ha quando si lavora con le liste o con gli alberi (sfruttato appunto in questo contesto con i grafi), il secondo é la mancanza della comprensione profonda della struttura dell'insieme dei naturali.

Per questa ragione nell'attivitá didattica si é posta attenzione a mettere in relazione gli aspetti grafici con l'assioma di induzione (come ad esempio quando abbiamo mostrato che i cammini minimi per un vertice dovevano per forza passare per un certo percorso).
D'altra parte l'altro obiettivo postoci é stato raggiunto, cioé il riuscire a combinare quello che viene chiamato l'aspetto euristico della matematica con quello deduttivo. Anche in questo caso la dimostrazione era sempre preceduta dalla formulazione di una congettura allo scopo di avvicinare gli allievi ad una visione epistemologica della disciplina come scoperta e ricerca.
Non é mancato, infine, il tentativo di sorprendere gli allievi mostrando il legame tra il numero dei cammini minimi in un grafo con determinate proprietá e i coefficienti binomiali: questo puó portare ad una dimostrazione interessante ed originale della formula del binomio di Newton e quindi ad un legame profondo tra ció che abitualmente essi usano nel calcolo (cioé i famosi prodotti notevoli) e la teoria matematica. La teoria dei grafi offre molti spunti di lavoro: dall'analisi dei semplici problemi connessi ai cammini euleriani per arrivare ai problemi del salto del cavallo (molto affascinanti per la semplicitá della formulazione e per le nozioni algebriche sottostanti); un'altra branca sono gli algoritmi definiti sui grafi: cammini minimi, flussi, problemi del commesso viaggiatore ecc...; per concludere un cenno va sicuramente fatto ai problemi del *colouring* dei grafi e a tutte le congetture non ancora dimostrate connensse ad essi. Insomma il terreno é fertile per mostrare una disciplina sicuramente non impolverita dai millenni, per mostrare esempi di ricerca ancora in atto senza dover ricorrere a nozioni troppo astratte o complesse.

Bibliografia

[Aga78] E. Agazzi, D. Palladino, *Le geometrie non euclidee e i fondamenti della geometria*, EST Mondadori, Milano, 1978.

[Bro99] J.R. Brown, *Philosophy of Mathematics: An introduction to the world of Proofs and Pictures*, Routledge, 1999.

[Deb01] R. De Beni, F. Pazzaglia et. al., *Psicologia cognitiva dell'apprendimento (Aspetti teorici e applicazioni)* ed. Erikson, 2001.

[Han00] Gila Hanna, *Proof, Explanation and exploration: an overview.* Educational Studies in Mathematics 44, pp. 5-23, 2000.

[Knu02] Eric J. Knuth *Teachers' conceptions of proof in the context of secondary school mathematics*. Journal of Mathematics Teacher Education 5, pp. 61-88, 2002.

[Mar98] M. A. Mariotti, *Introduzione alla dimostrazione all'inizio della scuola secondaria superiore*. L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, vol. 21B N. 3 Giugno 1998 pp. 214-249.

[Pif91] Mike Piff, *Discrete Mathematics (an introduction for software engineers)*. Cambridge University Press, 1991.

[Rus02] B. Russell, *Lo studio della matematica* 1902, tratto dalla raccolta Misticismo e logica, ed. TEA, pp. 56-70, 1993.

[Ski90] Steven Skiena, *Implementing Discrete Mathematics (Combinatorics and Graph Theory with Mathematica)*. Addison-Wesley publishing company, 1990.

[Tan98] A. S. Tanenbaum, *Reti di computer (terza edizione)*. Libreria UTET, 1998.

[Tar04] L. V. Tarca, *Dispense corso SSIS Veneto*. 2004.

[Zan98] R. Zan, *Dalla correzione degli errori all'intervento sulle difficoltá*. Supplemento al n. 10 del Notiziario UMI, pp. 12-28.