

1 Esercizi e soluzioni

Esercizio 1 Su un canale non affidabile un protocollo a livello data-link invia frame formati da f bit (di cui k di PCI). Si assuma indipendenza degli errori, e che la probabilità di errore per la trasmissione di un bit sia p_e . Rispondere ai seguenti quesiti:

1. Cosa si intende per indipendenza degli errori? È un'ipotesi realistica?
2. Qual è la probabilità di trasmissione errata di un frame?
3. Qual è il numero medio di trasmissioni di un frame prima che sia effettivamente ricevuto dal destinatario correttamente?
4. Assumendo $k = 32$ bit, determina la dimensione ottimale del frame affinché il rapporto tra numero di bit trasmessi e numero di bit utili correttamente ricevuti sia minimo considerando prima $p_e = 0.1$ e poi $p_e = 0.01$.

1. Per indipendenza degli errori intendiamo che la probabilità d'errore su un bit è indipendente dalla probabilità d'errore di tutti gli altri. L'ipotesi non è realistica perchè normalmente i disturbi su un canale causano un treno di errori (cioè una sequenza di bit corrotti).
2. Per trasmettere un frame corretto devono essere trasmessi f bit corretti. Per l'ipotesi di indipendenza degli errori abbiamo che $P\{\text{Frame corretto}\} = P_{fc} = p_c^f = (1 - p_e)^f$. Quindi la probabilità cercata $P_{fe} = 1 - P_{fc}$.
3. Indichiamo con N la v.c. che indica il numero di ritrasmissioni di un generico frame. La probabilità di trasmettere un frame una sola volta è chiaramente P_{fc} , la probabilità di doverlo trasmettere due volte è data dalla probabilità di una trasmissione errata (la prima) moltiplicata (per indipendenza degli errori) per la probabilità di una trasmissione corretta. In generale possiamo dire che:

$$P\{N = n\} = (1 - P_{fc})^{n-1} P_{fc} \quad n \in \mathbb{N}$$

Quindi N è un v.c. *discreta* distribuita geometricamente. La media di tale v.c. $E[N]$ è $1/P_{fc}^2$ che corrisponde al numero medio di trasmissioni di un frame.

4. Ogni pacchetto invia f bit di cui $f - k$ trasmettono informazione effettiva per il livello di rete. Pertanto se il numero medio di ritrasmissioni è $E[N] = (1 - p_e)^{-f}$ per trasmettere $f - k$ bit di informazione utile, mediamente ne vengono spediti $f \cdot (1 - p_e)^{-f}$. Quindi il rapporto da minimizzare è:

$$\frac{f \cdot (1 - p_e)^{-f}}{f - k}$$

¹In caso di errori o imprecisioni contattare andreamarin2001@hotmail.com

²La v.c. geometrica X ha distribuzione $P\{X = n\} = (1 - p)^{n-1} p$, media $\frac{1}{p}$ e varianza $\frac{1-p}{p^2}$

Ora p e k sono dati, ma purtroppo derivando rispetto ad f otteniamo un'equazione risolvibile solo mediante metodi approssimati (almeno date le conoscenze matematiche fondamentali dell'analisi). Impostando uno studio con uno strumento informatico come Derive si ottiene che per $p = 0.1$ il valore ottimo di f è $39.65 \approx 40$ bit, mentre per $p = 0.01$ il valore ottimo di f è $74.65 \approx 75$ bit. Nella tabella sottostante riportiamo i valori ottimi di f in funzione di alcuni p :

p	f [bit]
0.1	40
0.01	75
10^{-3}	196
10^{-4}	582
10^{-5}	1805
10^{-6}	5673